

1ª Lista de Exercícios de Cálculo II

Funções Vetoriais: Operações, Limite e Continuidade

Exercício 1 Dadas as funções $\vec{f}(t) = (t, 1, t^2)$, $\vec{g}(t) = (t-1, t^2, t^2-1)$ e $\vec{h}(t) = (e^t, t^2+2, 0)$, calcule:

- a) $\vec{f}(t) + \vec{g}(t)$ b) $\vec{f}(t) + \vec{h}(t)$ c) $\vec{g}(t) + \vec{h}(t)$
 d) $\vec{f}(t) - \vec{g}(t)$ e) $\vec{f}(t) - \vec{h}(t)$ f) $\vec{g}(t) - \vec{h}(t)$
 g) $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$ h) $\vec{f}(t) \cdot \vec{h}(t)$ i) $\vec{g}(t) \cdot \vec{h}(t)$
 j) $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$ k) $\vec{f}(t) \times \vec{h}(t)$ l) $\vec{g}(t) \times \vec{h}(t)$

Exercício 2 Calcule:

- a) $\lim_{t \rightarrow 2} (t, t^2, t^3)$
 b) $\lim_{t \rightarrow 0} (t+1, t-1, \text{sen}(t \cdot \pi))$
 c) $\lim_{t \rightarrow -3} (5, 3, 2)$
 d) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{t^2+t}, \frac{t^2}{2t+1}, \frac{2t^2-3t+1}{3t^2+2t^2-5t+2} \right)$
 e) $\lim_{t \rightarrow 3} \left(\frac{t^2-9}{t^3-27}, \frac{t^2-6t+9}{t-3}, \frac{t-3}{t^2+t-9} \right)$
 f) $\lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{t}-\sqrt{2}}{t-2}, \frac{\sqrt{t+2}-2}{t-2}, \frac{\sqrt{t^2+2}-\sqrt{6}}{\sqrt{t}-\sqrt{2}} \right)$

Exercício 3 Dadas as funções $\vec{f}(t) = (t, 1, t^2)$, $\vec{g}(t) = (t+1, \frac{t^2-4}{t-2}, 5t-4)$ e $\vec{h}(t) = (e^t, t^2+2, 0)$, calcule:

- a) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{f}(t) + \vec{g}(t))$ b) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{f}(t) + \vec{h}(t))$
 c) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{g}(t) + \vec{h}(t))$ d) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{f}(t) - \vec{g}(t))$
 e) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{f}(t) - \vec{h}(t))$ f) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{g}(t) - \vec{h}(t))$
 g) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))$ h) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{f}(t) \cdot \vec{h}(t))$
 i) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{g}(t) \cdot \vec{h}(t))$ j) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))$
 k) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{f}(t) \times \vec{h}(t))$ l) $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{g}(t) \times \vec{h}(t))$

Exercício 4 Dada a seguinte definição: Uma função vetorial $\vec{f} = \vec{f}(t)$, definida em um intervalo I, é contínua em t_0 , se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0).$$

Verifique se a função vetorial \vec{f} é contínua no ponto $t = t_0$, onde

- a) $\vec{f}(t) = (t, \frac{t+1}{t-1}, \frac{2t+3}{2t})$ e $t_0 = 2$.
 b) $\vec{f}(t) = \begin{cases} (\frac{t-3}{t^2-9}, 5\pi, \frac{t^2+2t-15}{t^2-4t+3}), & \text{se } t \neq 3 \\ (\frac{1}{6}, 5\pi, 4), & \text{se } t = 3 \end{cases}$ e $t_0 = 1$.
 c) $\vec{f}(t) = \begin{cases} (\frac{t-3}{t^2-9}, 5\pi, \frac{t^2+2t-15}{t^2-4t+3}), & \text{se } t \neq 3 \\ (\frac{1}{6}, 5\pi, 4), & \text{se } t = 3 \end{cases}$ e $t_0 = 3$.
 d) $\vec{f}(t) = \begin{cases} (\frac{t^2+2t-3}{2t-2}, \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, \frac{t^3+2t-3}{t^4+t^3-2t^2}), & \text{se } t \neq 1 \\ (2, \frac{1}{2}, 2), & \text{se } t = 1 \end{cases}$ e $t_0 = 1$.
 e) $\vec{f}(t) = \begin{cases} (\frac{t^2+2t-3}{2t-2}, \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, \frac{t^3+2t-3}{t^4+t^3-2t^2}), & \text{se } t \neq 1 \\ (2, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}), & \text{se } t = 1 \end{cases}$ e $t_0 = 1$.

Respostas

1. a) $\vec{f}(t) + \vec{g}(t) = (2t - 1, t^2 + 1, 2t^2 - 1)$ b) $\vec{f}(t) + \vec{h}(t) = (t + e^t, t^2 + 3, t^2)$
 c) $\vec{g}(t) + \vec{h}(t) = (e + t - 1, 2t^2 + 2, t^2 - 1)$ d) $\vec{f}(t) - \vec{g}(t) = (1, 1 - t^2, 1)$
 e) $\vec{f}(t) - \vec{h}(t) = (t - e^t, -t^2 - 1, t^2)$ f) $\vec{g}(t) - \vec{h}(t) = (-e^t + t - 1, -2, t^2 - 1)$
 g) $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = t^4 + t^2 - t$ h) $\vec{f}(t) \cdot \vec{h}(t) = t \cdot e^t + t^2 + 2$
 i) $\vec{g}(t) \cdot \vec{h}(t) = t \cdot e^t - e^t + t^4 + 2t^2$ j) $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t) = (-t^4 + t^2 - 1, t - t^2, t^3 - t + 1)$
 k) $\vec{f}(t) \times \vec{h}(t) = (-t^4 - 2t^2, t^2 \cdot e^t, t^3 + 2t - e^t)$ l) $\vec{g}(t) \times \vec{h}(t) = (t^4 + t^2 - 2, -t^2 \cdot e^t + e^t, -t^2 \cdot e^t + t^3 - t^2 + 2t - 2)$
2. a) (2, 4, 8) b) (1, -1, 0) c) (5, 3, 2) d) $(1, 0, \frac{1}{2})$ e) $(\frac{2}{9}, 0, 0)$ f) $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}})$
3. a) (1, 3, -4) b) (1, 3, 0) c) (2, 4, -4) d) (-1, -1, 4) e) (-1, -1, 0) f) (0, 0, -4)
 g) 2 h) 2 i) 2 j) (-4, 0, -1) k) (0, 0, -1) l) (8, -4, 0)
- 4) Apenas a função $\vec{f}(t)$ do item d) não é contínua no ponto indicado.